THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jacques FRISCH

PREMIÈRE THÈSE

Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 21 décembrs 1967 devant la Commission d'examen.

MM. H. CARTAN — Président

A. DOUADY, P. LELONG — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546008_0136

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M ZAMANSKY

MM	BRELOT	T Analyse supérieure
	PRENANT	T Anatomie et histologie comparée
	GRASSE	T Evolution des êtres organisés
	PREVOST	T Chimie Organique
	WYART	T Minéralo & Cristallo
	TEISSIER	T Zoologie
	MANGENOT	T Biologie végé (Orsay)
	AUGER	T Physique quantique et relativité
	MONNIER	T Physiologie générale
	PIVETEAU	T Paléontologie
	ROCARD	T Physique ENS
	CARTAN	T Mathématiques ENS
	LAFFITTE N	T Chimie générale
	COULOMB	T Physique du globe
Mlle	COUSIN	T Biologie animale SPCN
	CHRETIEN	T Chimie minérale
	BOCQUET	T Zoologie
	KASTLER	T Physique ENS
	EPHRUSSI	T Génétique
	RIVIERE	T Géologie SPCN & Sédiment (Orsay)
	GAUTHERET	T Biologie végétale PCB
	LUCAS R	T Recherches Physiques
	TOMMAS A	T Biologie cellulaire
	ARNULF	T Optique appliquée
	MORAND	T Physique enseignement
	BOLELLET	T Physique PCB
	FORTIER	T Mécanique exp des fluides
	DRACH	T Zoologie
	QUEREY	T Météo & Dynamique atmos
	GALLIEN	T Embryologie
	EICHORN	T Botanique
	DE CUGNAC	T Biologie végétale SPCN
Mlle	CAUCHOIS	T Chimie physique
	THELLIER	T Physique du globe
	L'HERITIER	T Biologie générale Orsay
	GRIVET	T Radioélectricité Orsay
	POINCIN	T Mécanique générale
	DU BREIL	T Arith & Théorie des nombres
	QUELET	T Chimie organique
	GAGNARD	T Géophysique appliquée
	CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
	CUVILLIER	T Micropaléontologie
	JUNG	T Géologie
	TRILLAT	T Microscopie et diffraction électro.
	WIEMANN	T Chimie organ & struc
	JACQUINOT	T Spectroscopie et Physique céleste (Orsay)
	VASSY	T Physique de l'atmosphère
	DESTOUCHES	T Théorie physique
	AMIEL	T Chimie générale
	NOCART	T Minéralo & Cristalo
	MATHIEU J P	T Physique optique
	COUTEAUX	T Cytologie
	MAY	T Zoologie
	CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie
	FELDMANN	T Biologie végétale marine
	GUINIER	T Physique des solides (Orsay)
	JOST	T Physiologie comparée
	FORTET	T Calcul des probabilités et Phys Mathém
	SCHWARTZ	T Calcul diff & Integral
	CHOUARD	T Physiologie végétale
	MALAVARD	T Aviation (Tech Aéron)
	NORMANT	T Synthèse organique
	BERARD	T Chimie minérale
	BUVAT	T Botanique ENS
	DUGUE	T Statistique mathématiques
	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
	ULRICH	T Physiologie Vég Appl
	MARECHAL	T Optique théor & appl
	KIRRMANN	T Théories chimiques
	CHADEFAUD	T Botanique
Mlle	LE BRETON	T Physiol de la nutrition
	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie
	ENDRESMANN	T Anatomie & Histo compar
	FRANCON	T Physique SPCN
	GLANGEAUD	T Géographie phys & géol
	GODEMENT	T Mathématiques MCP
	PISOT	T Technique math de la phys
	ROCH	T Géologie
	SCHATZMANN	T Astrophysique
	TERMIER	T Géologie générale
	ZAMANSKY	T Mathématiques générales
	LENOUVIER	T Physique MCP
	RIZET	T Génétique Orsay
	ROUTHIER	T Géologie appliquée
Mme	TONNELAT	T Physique théorique
	DIXMIER	T Mathématiques MPC
	SOUCHAY	T Chimie générale
	ALBAIN	T Electrotechnique générale
	BRUSSET	T Chimie systématique
	LEVY M	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme	CHAIX	T Chimie biologique
Mme	NUREL PY	T Biologie végétale PCB
	PANNETIER	T Chimie générale
	BRUN	T Mécanique des fluides I
	LEDERER	T Chimi biologique (Orsay)
Mme	DUBREIL	T Mathématiques (Agrég
Mme	LELONG	T Mathématiques II ENS
	BELLAIR	T Géologie SPCN
	COTTE	T Physique électricité
	DUBOIS J E	T Chimie organique
	LAMOTTE	T Zoologie ENS
	MICHEL A	T Chimie minérale Orsay
	OLMER	T Energétique générale
	ROUAULT	T Electricité (Orsay)
	GAUTHIER	T Mécanique appliquée
	BARCHEWITZ	T Chimie physique
	BROSSEL	T Physique atomique
	BUSER	T Physiologie comparée
	CANUS	T Physiologie végétale
	CASTAING	T Physique II Thermo (Orsay)
	CURIEN	T Minéralo & cristal
	MOYSE	T Physiologie végétale (Orsay)
Mme	CHARNIAUX	
	COTTON	T Evolution des êtres organisés
	POSSOMPES	T Zoologie
	PULLMANN	T Chimie quantique
	TEILLAC	T Physique Nucl & radioactivité (Orsay)
	TONNELAT	T Biol Physico-chim (Orsay)
	VILLE	T Econométrie
	WILLEMART	T Chimie PCB
	DODE	T Chimie (Orsay)
	FREYMANN	T Recherches physiques
	GUINOCHET	T Biologie végétale SPCN (Orsay)
	ROLLET	T Chimie minérale
Mlle	JOSIEN	T Chimie SPCN
	CHEVALLEY	T Géométrie algéb et théorie des groupes
	ARNOULT	T Electronique Orsay
	CHAPELLE	T Physique I (Orsay)
	DELANGE	T Mathématiques I (Orsay)
	DENY	T Mathématiques générales (Orsay)
	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides
	LUCAS	T Géologie
	ALLARD	T Chimie physique
	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales (Orsay)
	BRICARD	T Météor et physique de l'atmosphère
Mme	ALBE FESSARD	T Psycho physio
	FRIEDEL	T Physique des solides (Orsay)
	JULIA M	T Etudes des molécules complexes
	LENDER	T Biologie animale SPCN (Orsay)
	MAGAT	T Physico chimie des radioéléments
Mlle	QUINTIN	T Electrochimie
	MONOD	T Chimie du métabolisme
	BENOIT	T Physio animale (Orsay)
	DE POSSEL	T Analyse numérique
	CHARLOT	T Chimie analytique
	LEMEE	T Ecologie végétale (Orsay)
	GUERIN	T Chimie MPC (Orsay)
	CHATELET	T Chimie PCB
	JEAN	T Physic nucléaire (Orsay)
	MATTLER	T Physique SPCN
	BERGERARD	T Zoologie (Orsay)
	BERTEIN	T Electronique (Orsay)
	BOUISSIERES	T Radiochimie
Mme	COUTURE	T Thermo et méca physique
	ELLEMBERGER	T Géologie des grandes régions du globe (Orsay)
	FRANC	T Biologie animale PCB
	SCHNELL	Botanique tropicale
	STLKOWSKI	T Physiologie végétale
	ACHER	T Chimie biologique
	BAUDOIN	T Biologie animale PCB
	BEAUMONT	Biologie animale SPCN
	BLAMONT	Géophysique ionosphère
	BOUREAU	T Botanique
	CURIE D	Physique MGP
	DURAND DELGA	T Géologie
	FREON	T Chimie organique (Orsay)
	HELLER	T Physiologie végétale
	TORTRAT	T Calcul des probabilités
	CAILLEUX	T Géologie SPCN
	MAGNAN	Physique électricité
	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appli à la Chimie
		Théor A à la Phys Nucléaire
Mlle	FOURCROY	Biologie végétale SPCN
Mme	CHOQUET BRUHAT	Mécanique analytique et méca céleste
Mlle	VEIL	T Physiologie générale
	LWOFF	T Microbiologie
	SIESTRUNCK	T Méca phys & expérimentale
	LACOMBE	T Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
	BROCHARD	T Physique PCB (Orsay)
	CABANNES	T Mécanique générale
	LESIEUR	T Math I (Orsay)
	MAZET	T Méca générale (Orsay)
	CAIRE	Géographie physique et géo dynamique
	COMOLET	Méca des fluides
	CORABOEUF	T Physiologie animale (Orsay)
	DELLOUE	T Physique de l'atmosphère
	GORENFLOT	Botanique II (Orsay)
	HOUILLON	Biologie animale PCB
	JULLIEN J	Chimie SPCN (Orsay)
	MALGRANGE	T Technique Math de la physique (Orsay)
	OLIVIER	Anthropologie
	NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
	BLANC-LAPIERRE	T Physique ENS (Orsay)
	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay)
	KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
	SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines
	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay)
	THIRY	T Méca céleste
	ABELES	Physique SPCN
	AMAT	T Physique PCB
	AUBOIN	T Géologie
Mme	BENOIT-GUEUTAL	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	BOUGIS	Biologie marine Villefranche/mer
	BRUMAT	T Math MPC
	BRUNN	T Géologie historique (Orsay)
	CHABBAL	T Physique MGP (Orsay)
	DENIEUVELS	T Math propé
	D'ESPAGNAT	T Physique théorique (Orsay)
	FURON	T Géologie SPCN
Mme	GANS	T Génétique
	GENEVES	Biologie végétale PCB
	GUILBERT	Physique CUS Orléans
	HUPE	T Pétrographie
	HOLLANDE	T Biologie générale
	LIONS	T Analyse numérique
	MAITTE	T Chimie PCB
	MEYER	Physique propédeutique
	PANIGEL	Biologie générale
	RAVIER	Pétrographie
	ROSEAU	T Méca théorique des fluides
	ROUBINE	Electronique
	SILBER	T Chimie PCB
	UEBERSFELD	T Electronique
	YVON	T Théories physiques
	HERVE	T Mathématiques
	NERON	T Math MPC (Orsay)
Mme	PECKER WIMEL	T Astrophysique
	BALKANSKY	Physique MPC
	LE CORRE	T Electricité
	DELCROIX	T Physique théorique (Orsay)
	GOURDIN	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
	LEHMANN	T Phys Exp des hautes énergies
	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	ICMALEEF	Biologie animale PCB
	BARRAUD	Physiologie cellulaire
	LIORET	Physiologie végétale (Orsay)
	DARS	Géologie structurale et Géologie appliquée
	CAMEFORT	T Botanique (agrégation)
	VICHNEWSKY	T Mécanique industrielle
	BLAQUIERE	Electronique (Orsay)
	ARNOUS	T Physique théorique
	TATIBOUET	Chimie (CSU Orléans)
	MALLAVIN	T Mathématique,propé (Orsay)
	GAUDEMAR	Chimie propé
	PEREZ Y JORBA	Physique Exp des hautes énergies (Orsay)
	DAVID	T Chimie (agrégation Orsay)
	BROUSSE	T Mécanique théorique
	ROSCH	T Astronomie
	GUY	T Physique expérimentale
	LAZARD	Math MPC
	MOREL P	Physique MPC
	ARSAC	Programmation
	LEFEBVRE	Chimie MPC
	CHAPEVILLE	Biochimie
	BENOIT	Physique CPEM
	RIO	Chimie CPEM
	JAUZEIN	Géologie ENS
	PREVOST G	BV CPEM
	FAVARD P	BA CPEM
	VILKAS	Chimie CPEM
Mlle	FICINI	Chimie CPEM
	LEQUEUX	Astronomie
	COHEN TANNOUDJI	Physique MPC
	TAVERNIER	Physique CPEM
Mme	ROUZEN	Physique CPEM
	DURAND M	BA SPCN
	PASCAUD	Physiologie
Mme	PETIT	BA CPEM
	BROUSSE	Géologie (Orsay)
	CAGNIAC	Physique agrégation (Orsay)
	LEBEAAE	Zoologie (Orsay)
	SCHEFFER	Microbiologie (Orsay)
	de GENNES	Physique des solides (Orsay)
	RIOU	Physique nucléaires exp (Orsay)
	CLAUSER	Chimie biologique (Orsay)
	CHEVALIER	Physiologie animale (Orsay)
	JANCOVICI	Physique théorique (Orsay)
	FALK-VAIRANT	Physique nucléaire (Orsay)
	FETIZON	Chimie propé (Orsay)
	CERF	Mathématiques (Orsay)
	LI NGAT	Physique
	RIGAUDY	Chimie S.P.C.N.
	SIGWALT	idem
	FOURNET	Electricité générale
	COLLONGUES	chimie C.P.E.N.
	DUBERT	biochimie
	LAVOREL	biologie physico chimique
	MOREL F.	physiologie comparée
	TALBOT	génétique chimique
	Mme NOUGAREDE	botanique
	FRANCOIS	zoologie
	IVANOFF	océanographie physique
	CADIOT	chimie organique
	BARUCH	physique propédeutique
	NOZIERES	physique générale
	BOK	physique propédeutique
	SLONIMSKI	génétique

Secrétaire général R POILAIN

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jacques FRISCH

PREMIÈRE THÈSE

Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 21 décembre 1967 devant la Commission d'examen.

MM. H. CARTAN — Président

A. DOUADY, P. LELONG — Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Introduction

Soient $\varphi: Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques[1], $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur Y. Le but de cet article est de montrer que l'ensemble Y' des points $y \in Y$ où $\mathscr{F}$ n'est pas φ-plat est analytique (th. IV, 9), ce qui avait été conjecturé dans [2], exposé 13, par GROTHENDIECK. L'énoncé analogue en géométrie algébrique[2] est le théorème 11.1.1 de [4].

Dans la première partie, on montre (th. I, 9) que pour toute partie K, compacte et assez régulière d'un espace analytique S, l'anneau $\Gamma(K, \mathscr{O}_S)$ est noethérien. Cela permet d'étendre aux faisceaux analytiques cohérents certains théorèmes d'algèbre (lemme D'ARTIN-REES et théorème de platitude générique). On peut alors (propositon III, 6) établir un critère local d'acyclicité pour un complexe de modules libres sur $\boldsymbol{C}^n$ qui dépend d'un paramètre décrivant un espace analytique S. On arrive au but dans la quatrième partie, où l'on étudie aussi l'image de Y' par φ, et où l'on montre que, y étant un point de Y, le théorème 11.1.1 de [4] ne s'applique pas au morphisme de schémas: $(\mathrm{spec}(\mathscr{O}_{Y,y}) \to \mathrm{spec}(\mathscr{O}_{S,\varphi(y)})$ défini par φ.

C'est ADRIEN DOUADY qui m'a donné l'idée de ce travail et qui l'a dirigé. HENRI CARTAN et BERNARD MALGRANGE en ont lu une première version, et m'ont suggéré de nombreuses améliorations. Qu'il veuillent bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance.

I. Anneaux Noetheriens de fonctions analytiques

Le faisceau structural d'un espace analytique réel (resp. complexe) X sera noté $\mathscr{O}_X$. On appelle *sous-ensemble analytique* de X une partie fermée Y de X telle que, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert U de y dans X et une famille finie $(f_1, \ldots, f_p)$ de fonctions analytiques réelles (resp. complexes) sur U, i.e. de fonctions associées à des sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de U, vérifiant:

$$Y \cap U = \{y \in U;\ f_1(y) = \cdots = f_p(y) = 0\}.$$

[1] Les espaces analytiques considérés ici ne sont pas supposés réduits.

[2] Cf. note [6] à la fin de l'article, et aussi l'article suivant de KIEHL.

Si Y est un sous-ensemble analytique de X, on notera $\mathcal{O}_Y$ le faisceau des fonctions analytiques réelles (resp. complexes) sur Y; $\mathcal{I}$ étant le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ formé des sections dont la fonction associée s'annule sur Y, on a: $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. Dans le cas complexe, la notion de sous-ensemble analytique coïncide avec celle de sous-espace analytique réduit.

Définition (I, 1). *Etant donnés un espace topologique E, un faisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur E et un point a de E, on dit qu'un voisinage Ω de a est $\mathcal{F}$-privilégié (ou priviligié pour $\mathcal{F}$) si l'application canonique $\Gamma(\Omega, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_a$ est injective.*

Remarque (I, 2). Soit Y un espace analytique complexe réduit. Pour qu'un voisinage ouvert Ω d'un point $a \in Y$ soit $\mathcal{O}_Y$-privilégié, il suffit que toutes les composantes irréductibles de $Y \cap \Omega$ passent par a, (cela résulte de ce que l'ensemble des points lisses d'un ensemble analytique complexe irréductible Z est connexe et partout dense dans Z). Si Ω est DE STEIN, cette condition est aussi nécessaire, (on le voit en appliquant le théorème A à l'idéal défini par une composante irréductible de $Y \cap \Omega$ ne passant pas par a).

Remarque (I, 3). Soient $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur E, et a un point de E. Si Ω est un voisinage de a priviligié pour $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$, il l'est pour $\mathcal{F}$ (à cause de l'exactitude à gauche du foncteur Γ). Si Ω est un voisinage de a priviligié pour $\mathcal{F}$, il l'est pour $\mathcal{F}'$.

Proposition (I, 4). *Soient X un espace analytique complexe, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X a un point de X. Il existe un voisinage U de a, et une famille finie $(Y_0, \ldots, Y_m)$ de sous-ensembles analytiques de X passant par a jouissant de la propriété suivante: un voisinage Ω de a contenu dans U est $\mathcal{F}$-priviligié dès qu'il découpe sur chacun des Y_i un voisinage $\mathcal{O}_{Y_i}$-priviligié de a.*

Démonstration. a) Soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents sur X. Si la proposition vaut pour $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$, elle vaut aussi pour $\mathcal{F}$. Soient en effet U' (resp. U'') le voisinage de a, $(Y'_0, \ldots, Y'_{m'})$ (resp. $(Y''_0, \ldots, Y''_{m''})$) la famille de sous-ensembles analytiques de U' (resp. U'') associés à $\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{F}''$) par la proposition. Le voisinage $U = U' \cap U''$ et la famille $(Y'_0 \cap U, \ldots, Y'_{m'} \cap U, \ldots, Y''_{m''} \cap U)$ de sous-ensembles analytiques de U ont la propriété requise: cela résulte de (I, 3).

b) $\mathcal{F}$ étant donné, on peut trouver un voisinage de a, et une suite de composition $\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{m+1}$ de $\mathcal{F}$ au-dessus de ce voisinage, telle que pour $0 \leqq i \leqq m$, $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{Y_i}$, où Y_i est un sous-ensemble

analytique irréductible de X passant par a (cf. [1], ch. IV, §1, th. 1). La proposition vaut pour chacun des $\mathcal{O}_{Y_i}$ d'après (I, 2), donc pour $\mathcal{F}$ d'après a).

Rappelons quelques définitions et résultats classiques sur les ensembles semi-analytiques (pour plus de précision, cf. [6], §1).

Soit Ω une partie ouverte d'une variété analytique réelle M. On dit qu'une partition $\mathcal{N}$ de Ω est une *stratification* si $\mathcal{N}$ est une partition finie de Ω en sous-variétés analytiques connexes localement fermées, et si pour tout élément (ou strate) Γ de $\mathcal{N}$, $(\bar{\Gamma} - \Gamma) \cap \Omega$ est une réunion de strates de dimension strictement inférieure.

Pour toute partie ouverte ω de Ω, notons $\mathcal{N}(\omega)$ la partition de ω dont les éléments sont les composantes connexes des ensembles $\omega \cap \Gamma$, $\Gamma \in \mathcal{N}$. Un voisinage ouvert Q d'un point x de Ω sera qualifié de *normal* pour la stratification $\mathcal{N}$, si $\mathcal{N}(Q)$ est une stratification de Q, et si x est adhérent à toute strate de $\mathcal{N}(Q)$.

Soit Q un voisinage normal de x, et soit Γ la strate de $\mathcal{N}(Q)$ contenant x. Toute strate de $\mathcal{N}(Q)$ autre que Γ a une dimension strictement supérieure à celle de Γ; Q est connexe, et Γ est l'intersection avec Q de la strate de $\mathcal{N}$ passant par x.

Une stratification est dite *compatible avec une partie A de M* si toute strate est soit contenue dans A, soit disjointe de A.

Soit $a \in M$. Désignons par $\mathcal{S}_a$ la plus petite famille de germes en a de parties de M, stable pour les opérations de réunion et intersection finies, et de passage au complémentaire, et contenant les germes de la forme $\{x \in M; f(x) < 0\}_a$, où f est une fonction analytique réelle au voisinage de a. On dit qu'une partie A de M est *semi-analytique* si, pour tout point x de M, son germe en x est un élément de $\mathcal{S}_x$. Cette notion étant de caractère local, on définit de façon évidente les parties semi-analytiques d'un espace analytique réel. Enfin, une partie d'un espace analytique complexe sera dite semi-analytique si elle l'est pour la structure réelle sous-jacente. Cela dit, voici le résultat que nous utiliserons ([6], ibid.):

Soient X un espace analytique réel, a un point de X et $(A_0, \ldots, A_m)$ une famille finie de parties semi-analytiques de X. Il existe une stratification $\mathcal{N}$ d'un voisinage ouvert U de a compatible avec chacun des A_i, telle que tout point x de U possède un système fondamental de voisinages normaux.

Propoistion (I, 5). *Soient X un espace analytique réel, A une partie semi-analytique de X, a un point de A, et $(Y_0, \ldots, Y_m)$ une famille finie de sous-ensembles analytiques de X passant par a. Il existe un système fondamental $\mathfrak{B}$ de voisinages de a dans A, dont tout élément V possède lui-*

Soit X un espace analytique réel ou complexe. On dit qu'une partie A de X est de STEIN si elle admet un système fondamental de voisinages de STEIN. Rappelons que dans le cas réel, cette condition est toujours réalisée.

Proposition (I, 7). *Soient X un espace analytique réel ou complexe, A une partie de X semi-analytique et de* STEIN, *$\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur A. Toute famille filtrante croissante $(\mathscr{F}_j)_{j\in J}$ de sous-faisceaux analytiques cohérents de $\mathscr{F}$ est localement stationnaire.*

Démonstration. Soit a un point de A. L'anneau $\mathscr{O}_{X,a}$ étant noethérien, la suite $\mathscr{F}_{j,a}$ est stationnaire à partir d'un certain rang j_0. Soit W un voisinage $\mathscr{F}/\mathscr{F}_{j_0}$-privilégié de a dans A (il en existe d'après I, 6).

Dans le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \Gamma(W,\mathscr{F}_{j_0}) & \to & \Gamma(W,\mathscr{F}) & \to & \Gamma(W,\mathscr{F}/\mathscr{F}_{j_0}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ 0 & \to & \mathscr{F}_{j_0,a} & \to & \mathscr{F}_a & \to & (\mathscr{F}/\mathscr{F}_{j_0})_a, \end{array}$$

les lignes sont exactes et l'homomorphisme ε est injectif. Il en résulte que $\Gamma(W,\mathscr{F}_j)=\Gamma(W,\mathscr{F}_{j_0})$ pour tout $j\geqq j_0$. On a donc pour tout point b de W et tout $j\geqq j_0$:

$$\mathscr{F}_{j,b}=\Gamma(A,\mathscr{F}_j)\cdot\mathscr{O}_{X,b}=\Gamma(W,\mathscr{F}_j)\cdot\mathscr{O}_{X,b}=\Gamma(W,\mathscr{F}_{j_0})\cdot\mathscr{O}_{X,b},$$

(la première égalité résulte du théorème A). Ainsi, la suite $\mathscr{F}_j$ est stationnaire à partir de j_0 au-dessus de W.

Corollaire (I, 8). *Soient X un espace analytique réel ou complexe, A une partie de X semi-analytique et de* STEIN, *$\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Si E est un sous-ensemble de $\Gamma(A,\mathscr{F})$, le sous-faisceau analytique de $\mathscr{F}|_A$ engendré au-dessus de A par E est cohérent.*

Démonstration. Pour toute partie finie E_i de E, le sous-faisceau $\mathscr{F}_i$ de $\mathscr{F}|_A$ engendré au-dessus de A par les éléments de E_i est cohérent. Comme le sous-faisceau $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}|_A$ engendré au-dessus de A par E est la réunion de la famille filtrante croissante $(\mathscr{F}_i)$, l'assertion résulte de la proposition (I, 7).

Théorème (I, 9). *Soient X un espace analytique réel ou complexe, A une partie de X compacte, semi-analytique et de* STEIN. *L'anneau $\Gamma(A,\mathscr{O}_X)$ est noethérien.*

Démonstration. Soit I un idéal de $\Gamma(A,\mathscr{O}_X)$. Le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_X|_A$ engendré au-dessus de A par I est cohérent. Comme A est compact, on peut trouver une famille finie $(f_1,\ldots,f_p)$ d'éléments de I tels que pour tout $x\in A$, $\mathscr{I}_x$ soit engendré sur $\mathscr{O}_{X,x}$ par les germes en x de $f_1,\ldots,f_p$. Le théorème B entraîne alors que I est engendré sur $\Gamma(A,\mathscr{O}_X)$ par $f_1,\ldots,f_p$.

Remarque (I; 10). Soient X un espace analytique réel ou complexe, $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X; tout $x \in X$ possède un système fondamental de voisinages $\mathscr{F}$-provilégiés, compacts, semi-analytiques et de STEIN. (On peut en effet supposer $X = \boldsymbol{C}^n$; on sait alors que x possède un système fondamental de voisinages $\mathscr{F}$-privilégiés qui sont des polydisques compacts[3].)

Remarque (I, 11). Le théorème (I, 9) est en général faux si l'on ne suppose pas A semi-analytique. Voici un contre-exemple. Soit A l'ensemble compact des points $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ tels que:

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \sin \frac{1}{x} \leqq y \leqq 10.$$

Cet ensemble n'est pas semi-analytique à l'origine. Les points M_k de coordonnées $(x_k, 0)$, où

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ne sont pas dans A. Pour tout entier k, la fonction

$$f_k(P) = 1 - \cos(\overrightarrow{M_k P}, \overrightarrow{M_k 0})$$

est donc analytique réelle sur A. Comme $f_k(P) = 0$ pour $P \in A \cap \{y = 0\} \cap \{x < x_k\}$, et que $f_k(P) = 2$ pour $P \in A \cap \{y = 0\} \cap \{x > x_k\}$, la suite des idéaux engendrés dans $\Gamma(A, \mathscr{C}_{\boldsymbol{R}^2})$ par les f_k est croissante, mais non stationnaire.

Lemme (I, 12). *Soient X un espace analytique réel ou complexe, $\mathscr{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathscr{C}_X$, $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$ deux sous-faisceaux analytiques cohérents d'un faisceau analytique cohérent $\mathscr{F}$ sur X. Alors*

(i) $\Gamma(X, \mathscr{E}' \cap \mathscr{E}'') = \Gamma(X, \mathscr{E}') \cap \Gamma(X, \mathscr{E}'')$,

(ii) *si X est de* STEIN, $\Gamma(X, \mathscr{I}\mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{I}) \cdot \Gamma(X, \mathscr{F})$.

Démonstration. (i) est trivial. Quant à (ii), l'inclusion $\supset$ est évidente; d'autre part, le morphisme canonique $\mathscr{I} \otimes_{\mathscr{C}_X} \mathscr{F} \to \mathscr{I}\mathscr{F}$ est par définition surjectif, donc l'homomorphisme canonique:

$$\Gamma(X, \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{C}_X} \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{I}) \otimes_{\Gamma(X, \mathscr{C}_X)} \Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X, \mathscr{I}\mathscr{F})$$

l'est aussi en vertu du théorème B, d'où l'égalité.

Proposition (I, 13) (Lemme d'ARTIN-REES). *Soient X un espace analytique réel ou complexe, $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, $\mathscr{E}$ un sous-faisceau analytique cohérent de $\mathscr{F}$, $\mathscr{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux*

[3] Cf. par exemple [3], 7, théorème 1 (où l'on impose des propriétés encore plus fortes aux voisinages), ou même [5], théorème 7, page 32.

de $\mathcal{O}_X$. Pour tout point $x \in X$, il existe un entier $\lambda_0 \geqq 0$ et un voisinage ouvert Ω de x au-dessus duquel on ait pour tout entier $\lambda \geqq \lambda_0$:

$$\mathcal{I}(\mathcal{I}^\lambda \mathcal{F} \cap \mathcal{E}) = \mathcal{I}^{\lambda+1} \mathcal{F} \cap \mathcal{E}.$$

Démonstration. Soient K un voisinage compact, semi-analytique et DE STEIN d'un point $x \in X$, et Ω l'intérieur de K. Notons respectivement A, I, E et F les anneaux et modules de sections sur K de $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$: A est un anneau noethérien (I, 9) et F un A-module de type fini. On peut donc appliquer le lemme D'ARTIN-REES ([*1*], ch. III, § 3, corollaire 1 du th. 1): il existe un entier $\lambda_0 \geqq 0$ tel que l'on ait pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$:

$$(*) \qquad I(I^\lambda F \cap E) = I^{\lambda+1} F \cap E.$$

Posons pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$:

$$\mathcal{G}_\lambda = (\mathcal{I}^{\lambda+1} \mathcal{F} \cap \mathcal{E}) / \mathcal{I} \cdot (\mathcal{I}^\lambda \mathcal{F} \cap \mathcal{E}).$$

On voit grâce au lemme précédent que $(*)$ s'écrit simplement: $\Gamma(K, \mathcal{G}_\lambda) = 0$; K étant de STEIN, les faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{G}_\lambda$ sont donc nuls au-dessus de Ω en vertu du théorème B. D'où la proposition.

II. Platitude générique

Soient S un espace analytique complexe, U une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique sur $S \times U$. Pour tout $(s, x) \in S \times U$, la projection $S \times U \to S$ fait de $\mathcal{O}_{S \times U, (s, x)}$ une $\mathcal{O}_{S, s}$-algèbre, et de $\mathcal{F}_{(s, x)}$ un $\mathcal{O}_{S, s}$-module: si celui-ci est libre (resp. plat), on dit que $\mathcal{F}$ est S-libre (resp. S-plat) en (s, x).

Théorème (II, 1). *Soient S un espace analytique complexe réduit, U une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, (s, x) un point de $S \times U$, $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux définissant le sous-espace $S \times \{x\}$ de $S \times U$, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $S \times U$.*

(i) *Il existe un voisinage ouvert Ω de s dans S, et un sous-ensemble analytique strict T de Ω tels que, pour tout $s' \in \Omega - T$ et tout entier $k \geqq 0$, le faisceau $\mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1} \mathcal{F}$ soit S-libre en (s', x).*

(ii) *Si tous les faisceaux $\mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1} \mathcal{F}$ sont S-libres au point (s', x), $\mathcal{F}$ est S-plat en ce point.*

Démonstration. (i). Posons:

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{I}} \mathcal{O}_{S \times U} = \bigoplus_{k \geqq 0} \mathcal{I}^k / \mathcal{I}^{k+1}, \qquad \mathcal{G}^k = \mathcal{I}^k \mathcal{F} / \mathcal{I}^{k+1} \mathcal{F}, \qquad \mathcal{G} = \mathrm{gr}_{\mathcal{I}} \mathcal{F} = \bigoplus_{k \geqq 0} \mathcal{G}^k.$$

Pour chaque k, $\mathcal{G}^k$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_S$-modules, et il revient évidemment au même de montrer qu'en un point (s', x), tous les $\mathcal{F}/\mathcal{I}^k \mathcal{F}$ sont S-libres, ou de montrer qu'en ce point, $\mathcal{G}$ est S-libre. On s'appuiera sur le lemme suivant ([*4*], lemme 6.9.2):

Soient A un anneau intègre noethérien, B une A-algèbre de type fini, G un B-module de type fini. Il existe $f \neq 0$ dans A tel que G_f soit un A_f-module libre.

On peut supposer le germe de S en s irréductible (on se ramène facilement à ce cas par récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de ce germe). Soit K un voisinage $\mathcal{C}_S$-privilégié de s dans S, compact, semi-analytique et de STEIN (remarque I, 10). L'anneau $A = \Gamma(K, \mathcal{C}_S)$ est alors noethérien et intègre. Notons respectivement O, I, B, F, G^k et G les anneaux et modules des sections sur $K \times \{x\}$ des faisceaux $\mathcal{C}_{S\times U}$, $\mathcal{I}$, $\mathrm{gr}_{\mathcal{I}} \mathcal{C}_{S\times U}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}^k$ et $\mathcal{G}$; F est un O-module de type fini; on a:

$$B = \mathrm{gr}_I O, \qquad G = \mathrm{gr}_I F = \bigoplus_{k\geq 0} G^k;$$

B est une A-algèbre de type fini, G un B-module de type fini. D'après le lemme, il existe donc $f \neq 0$ dans A tel que G_f soit un A_f-module libre. Prenons alors pour Ω l'intérieur de K, et pour T le lieu des zéros de f; comme S est réduit, T est un sous-ensemble analytique strict de Ω. Vérifions que pour tout $s' \in \Omega - T$, chaque $\mathcal{G}^k$ est S-libre en (s', x). Comme le $\mathcal{C}_S$-module $\mathcal{G}^k$ est cohérent, on a d'après le théorème B:

$$\mathcal{G}^k_{(s',x)} = G^k \otimes_A \mathcal{C}_{S,s'},$$

et puisque $f_{s'}$ est un élément inversible de $\mathcal{C}_{S,s'}$, on a même

$$\mathcal{G}^k_{(s',x)} = G^k_f \otimes_{A_f} \mathcal{C}_{S,s'};$$

comme G^k_f est A_f-plat (car facteur direct du A_f-module libre G_f), $\mathcal{G}^k$ est $\mathcal{C}_S$-plat, donc $\mathcal{C}_S$-libre en (s', x).

(ii). Supposons que tous les faisceaux $\mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1}\mathcal{F}$ soient S-libres en un point (s', x). Posons

$$B = \mathcal{C}_{S\times U,(s',x)}, \qquad I = \mathcal{I}_{(s',x)}, \qquad A = \mathcal{C}_{S,s} = B/I, \qquad F = \mathcal{F}_{(s',x)},$$

et

$$F_k = (\mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1}\mathcal{F})_{(s',x)} = F/I^{k+1}F$$

(ces notations sont sans rapport avec celles introduites dans la démonstration de (i)). Il suffit de vérifier que si $\varphi: M \to N$ est un homomorphisme injectif de A-modules de type fini, alors

$$\psi = \varphi \otimes 1_F : M \otimes_A F \to N \otimes_A F$$

est encore injectif. Pour tout $k \geq 0$, l'homorphisme

$$\psi_k = \varphi \otimes 1_{F_k} : M \otimes_A F_k \to N \otimes_A F_k$$

est injectif, puisque F_k est un A-module libre. Il en est donc de même de

$$\varprojlim \psi_k : \widehat{M \otimes_A F} \to \widehat{N \otimes_A F}$$

($\widehat{\ }$ signifie séparé-complété pour la topologie I-adique). Or dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A F & \xrightarrow{\psi} & N \otimes_A F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{M \otimes_A F} & \xrightarrow{\varprojlim \psi_k} & \widehat{N \otimes_A F}, \end{array}$$

les applications canoniques verticales sont injectives (car les B-modules $M \otimes_A F$ et $N \otimes_A F$ sont de type fini, donc séparés pour la topologie I-adique). Par suite, ψ est injective, d'où (ii).

III. Complexes dependant de paramètres

Soient S un espace analytique complexe, U une partie ouverte de $\boldsymbol{C}^n$. Pour $s \in S$, l'application $i_s : U \to S \times U$ qui à $x \in U$ associe $(s, x) \in S \times U$ fait de $\mathcal{O}_U$ une $\mathcal{O}_{S \times U}$-algèbre. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique sur $S \times U$, on posera $\mathcal{F}(s) = i_s^* \mathcal{F}$: c'est un faisceau analytique sur U, dont on notera $\mathcal{F}_x(s)$ la fibre en $x \in U$. Rappelons que :

$$\mathcal{F}_x(s) = \mathcal{F}_{(s,x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U, (s,x)}} \mathcal{O}_{U,x} = \mathcal{F}_{(s,x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \boldsymbol{C}.$$

Cela dit, nous allons utiliser le résultat du numéro précédent pour déduire de la proposition (I, 13) des énoncés analogues, mais relatifs à une famille de faisceaux sur U paramétrée par un espace analytique S. Pour $x \in U$, on notera $\mathfrak{M}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{U,x}$.

Proposition (III, 1). *Soient S un espace analytique complexe, U une partie ouverte de $\boldsymbol{C}^n$, (s_0, x_0) un point de $S \times U$, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $S \times U$, $\mathcal{E}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{F}$. Il existe un voisinage ouvert $\Omega \times V$ de (s_0, x_0) dans $S \times U$ et un entier $\lambda_0 \geqq 0$ tels que l'on ait pour tout $\lambda \geqq \lambda_0$ et tout $(s, x) \in \Omega \times V$:*

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}_x^\lambda \mathcal{F}_x(s) \cap \tilde{\mathcal{E}}_x(s)) = \mathfrak{M}_x^{\lambda+1} \mathcal{F}_x(s) \cap \tilde{\mathcal{E}}_x(s),$$

où $\tilde{\mathcal{E}}_x(s)$ désigne l'image canonique de $\mathcal{E}_x(s)$ dans $\mathcal{F}_x(s)$.

Démonstration. 1) Soit $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S\,\mathrm{red}}$, et soit $\mathcal{E}'$ l'image canonique de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S\,\mathrm{red}}$ dans $\mathcal{F}'$: on a $\mathcal{F}'_x(s) = \mathcal{F}_x(s)$ et $\tilde{\mathcal{E}}'_x(s) = \tilde{\mathcal{E}}_x(s)$ pour tout $(s, x) \in S \times U$. On peut donc supposer S réduit.

2) Considérons l'énoncé que voici : Dans les conditions de la proposition (III, 1), il existe un voisinage ouvert Ω de S_0 dans S et un entier $\lambda_0 \geqq 0$ tels que l'on ait tout $\lambda \geqq \lambda_0$ et tout $s \in \Omega$:

$$(*) \qquad \mathfrak{M}_{x_0}(\mathfrak{M}_{x_0}^\lambda \mathcal{F}_{x_0}(s) \cap \tilde{\mathcal{E}}_{x_0}(s)) = \mathfrak{M}_{x_0}^{\lambda+1} \mathcal{F}_{x_0}(s) \cap \tilde{\mathcal{E}}_{x_0}(s).$$

Soient $U' \times W$ un voisinage ouvert de $(x_0, 0)$ dans $U \times \boldsymbol{C}^n$ tel que $U' + W \subset U$ et φ: $S \times U' \times W \to S \times U$ l'application $(s, x, y) \to (s, x+y)$. Soient $\mathscr{F}' = \varphi^* \mathscr{F}$, et $\mathscr{E}'$ l'image canonique de $\varphi^* \mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}'$. Alors $\mathscr{F}_0'(s, x) = \mathscr{F}_{x_0}(s)$ et $\tilde{\mathscr{E}}_0'(s, x) = \mathscr{E}_x(s)$ pour tout $(s, x) \in S \times U'$. On voit donc que l'énoncé en question, appliqué aux faisceaux $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{F}'$ et au point $((s, x), 0)$ de $(S \times U') \times W$ entraîne la proposition.

3) Démontrons cet énoncé par récurrence sur la dimension k, et le nombre de composantes irréductibles du germe de S au point s_0. Si $k = 0$, il résulte immédiatement du lemme d'ARTIN-REES. Nous pouvons donc supposer k non nul, et l'énoncé établi pour tout sous-ensemble analytique propre T de S. Cela étant, notons $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux défini par le sous-ensemble $S \times \{x_0\}$ de $S \times U$. D'après la proposition (I, 13), il existe un voisinage $\Omega_1 \times U_1$ de (s_0, x_0) dans $S \times U$ et un entier $\lambda_1 \geqq 0$ tels que, pour tout $\lambda \geqq \lambda_1$, on ait au-dessus de $\Omega_1 \times U_1$:

$$(**) \qquad \mathscr{I}(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \cap \mathscr{E}) = \mathscr{I}^{\lambda+1} \mathscr{F} \cap \mathscr{E}.$$

Lemme (III, 2). *Pour tout entier $\lambda \geqq \lambda_1$, l'égalité (*) est valable en tout point $s \in \Omega_1$ tel que le $\mathscr{O}_{S,s}$-module*

$$\bigoplus_{\lambda \geqq 1} [\mathscr{F}/(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} + \mathscr{E})]_{(s, x_0)}$$

soit libre.

Achevons la démonstration de notre énoncé en admettant le lemme. On a pour tout entier $\lambda \geqq 0$:

$$\mathscr{F}/(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} + \mathscr{E}) = (\mathscr{F}/\mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_{S \times U}} (\mathscr{O}_{S \times U}/\mathscr{I}^\lambda).$$

Or, en vertu du théorème (II, 1) appliqué au faisceau $\mathscr{F}/\mathscr{E}$, il existe un voisinage ouvert $\Omega_1' \subset \Omega_1$ de s_0 dans S, et un sous-ensemble analytique propre T de Ω_1', tels que l'hypothèse du lemme (III, 2) soit vérifiée en tout point s de $\Omega_1' - T$. Il ne reste donc plus qu'à prouver la proposition pour les points de T. Mais cela résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à T, au faisceau $\mathscr{F}' = (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{S \times U}} \mathscr{O}_{T \times U})|_{T \times U}$ et à l'image canonique de $(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{S \times U}} \mathscr{O}_{T \times U})|_{T \times U}$ dans $\mathscr{F}'$.

Démonstration du lemme. On a pour tout $\lambda \geqq \lambda_1$:

$$\operatorname{im}(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{S \times U}} \mathscr{O}_U) \cap \operatorname{im}(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{S \times U}} \mathscr{O}_U) = \operatorname{im}[(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} \cap \mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_{S \times U}} \mathscr{O}_U],$$

im signifiant: image canonique dans $(\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} + \mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_{S \times U}} \mathscr{O}_U$. Or, en un point $s \in \Omega_1$ où l'hypothèse du lemme est satisfaite, l'application canonique

$$\Phi\colon (\mathscr{I}^\lambda \mathscr{F} + \mathscr{E})_{(s, x_0)} \otimes_{\mathscr{O}_{S \times U, (s, x_0)}} \mathscr{O}_{U, x_0} \to \mathscr{F}_{x_0}(s)$$

est injective. On a donc en un tel point:

$$\Phi[\operatorname{im}(\mathscr{I}^{\lambda}\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{S\times U}}\mathscr{O}_U)]\cap\Phi[\operatorname{im}(\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_{S\times U}}\mathscr{O}_U)]$$
$$=\Phi(\operatorname{im}[(\mathscr{I}^{\lambda}\mathscr{F}\cap\mathscr{E})\otimes_{\mathscr{O}_{S\times U}}\mathscr{O}_U]),$$

c'est-à-dire:

$$\mathfrak{M}^{\lambda}_{x_0}\mathscr{F}_{x_0}(s)\cap\tilde{\mathscr{E}}_{x_0}(s)=(\mathscr{I}^{\lambda}\mathscr{F}\cap\mathscr{E})^{\sim}_{x_0}(s).$$

D'après (**), on a donc pour tout $\lambda\geqq\lambda_1$ et tout point $s\in\Omega_1$ vérifiant l'hypothèse du lemme:

$$\mathfrak{M}_{x_0}(\mathfrak{M}^{\lambda}_{x_0}\mathscr{F}_{x_0}(s)\cap\tilde{\mathscr{E}}_{x_0}(s))=[\mathscr{I}(\mathscr{I}^{\lambda}\mathscr{F}\cap\mathscr{E})]^{\sim}_{x_0}(s)$$
$$=(\mathscr{I}^{\lambda+1}\mathscr{F}\cap\mathscr{E})^{\sim}_{x_0}(s)=\mathfrak{M}^{\lambda+1}_{x_0}\mathscr{F}_{x_0}(s)\cap\tilde{\mathscr{E}}_{x_0}(s),$$

et le lemme est établi.

Toujours dans la même situation, considérons un morphisme $v\colon\mathscr{O}^q_{S\times U}\to\mathscr{O}^r_{S\times U}$. Pour $(s,x)\in S\times U$, soit $v_{(s,x)}$ le germe de v au point (s,x). On posera:

$$v_x(s)=v_{(s,x)}\otimes 1_{\mathscr{O}_{U,x}}\colon\mathscr{O}^q_{U,x}\to\mathscr{O}^r_{U,x}.$$

On a évidemment $(\widetilde{\operatorname{Im} v})_x(s)=\operatorname{Im} v_x(s)$. La proposition (III, 1) entraine donc:

Corollaire (III, 3). *Soient S un espace analytique complexe, U une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, (s_0,x_0) un point de $S\times U$, v un morphisme $\mathscr{O}^q_{S\times U}\to\mathscr{O}^r_{S\times U}$. Il existe un voisinage ouvert $\Omega\times V$ de (s_0,x_0) dans $S\times U$ et un entier $\lambda_0\geqq 0$ tels que l'on ait pour tout $\lambda\geqq\lambda_0$ et tout $(s,x)\in\Omega\times V$:*

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}^{\lambda}_x\mathscr{O}^r_{U,x}\cap\operatorname{Im} v_x(s))=\mathfrak{M}^{\lambda+1}_x\mathscr{O}^r_{U,x}\cap\operatorname{Im} v_x(s).$$

Bien qu'il soit en général faux que $(\widetilde{\operatorname{Ker} v})_x(s)=\operatorname{Ker} v_x(s)$, nous allons établir un résultat analogue pour $\operatorname{Ker} v$. Pour tout $f\in\mathscr{O}^q_{S\times U,(s,x)}$, notons $f_x(s)$ son image canonique dans $\mathscr{O}^q_{S\times U,x}(s)=\mathscr{O}^q_{S,x}$.

Lemme (III, 4). *Soient S un espace analytique complexe réduit, U une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, (s_0,x_0) un point de $S\times U$, v un morphisme $\mathscr{O}^q_{S\times U}\to\mathscr{O}^r_{S\times U}$. Il existe un voisinage Ω de s_0 dans S et une famille finie $(f^i)_{i\in I}$ de sections de $\mathscr{O}^q_{S\times U}$ au-dessus de $\Omega\times\{x_0\}$, tels que, pour tout $s\in S$, ceux des $f^i_{x_0}(s)$ qui appartiennent à $\operatorname{Ker} v_{x_0}(s)$ engendrent ce $\mathscr{O}_{U,x_0}$-module.*

Démonstration. L'assertion étant de caractère local, on peut, par récurrence sur la dimension et le nombre de composantes irréductibles du germe de S au point s_0, supposer le lemme établi pour tout sous-ensemble analytique propre T de S. Cela dit, appliquons le théorème (II, 1) au faisceau $\mathscr{F}=\operatorname{Coker} v$: il existe un voisinage Ω' de s_0 dans S et un sous-ensemble analytique propre T de Ω' tels que, pour tout $s\in\Omega'-T$, $\mathscr{F}_{(s,x_0)}$

soit un $\mathcal{O}_{S,s}$-module plat. Quitte à restreindre Ω', on peut trouver une famille finie $(g^j)_{j\in J}$ de sections de Ker v au-dessus de $\Omega'\times\{x_0\}$ telle que, pour tout $s\in\Omega'$, les $g^j_{(s,x_0)}$ engendrent le $\mathcal{O}_{S\times U,(s,x_0)}$-module Ker $v_{x_0}(s)$. Cela prouve le lemme si T ne passe pas par s_0.

Si T passe par s_0, soit $\check{v}=v\otimes_{\mathcal{O}_{S\times U}}1_{\mathcal{O}_{T\times U}}:\mathcal{O}^q_{T\times U}\to\mathcal{O}^r_{T\times U}$. Par hypothèse de récurrence, il existe un voisinage $\check{\Omega}$ de s_0 dans T et une famille finie $(\check{h}^k)_{k\in K}$ de sections de $\mathcal{O}^q_{T\times U}$ au-dessus de $\check{\Omega}\times\{x_0\}$ tels que, pour tout $s\in\check{\Omega}$, les $\check{h}^k_{x_0}(s)$ appartenant à Ker $\check{v}_{x_0}(s)$ engendrent ce $\mathcal{O}_{U,x_0}$-module. On peut trouver un voisinage Ω de s_0 dans S, contenu dans Ω', tel que $\Omega\cap T=\check{\Omega}$, et que, pour tout $k\in K$, h^k soit la trace sur $T\times\{x_0\}$ d'une section h^k de $\mathcal{O}^q_{T\times U}$ au-dessus de Ω. Or, on a pour tout $s\in\Omega\cap T$: $v_{x_0}(s)=\check{v}_{x_0}(s)$, et $h^k_{x_0}(s)=\check{h}^k_{x_0}(s)$ quel que soit $k\in K$. Posons alors $I=J\cup K$, $f^i=g^i|_\Omega$ pour $i\in I$, et $f^k=h^k$ pour $k\in K$. Le voisinage Ω et la famille $(f^i)_{i\in I}$ ont les propriétés requises.

Proposition (III, 5). *Soient S un espace analytique complexe, U une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, (s_0,x_0) un point de $S\times U$, v un morphisme $\mathcal{O}^q_{S\times U}\to\mathcal{O}^r_{S\times U}$. Il existe un voisinage $\Omega\times V$ de (s_0,x_0) dans $S\times U$ et un entier $\mu_0\geqq 0$ tels que l'on ait pour tout entier $\mu\geqq\mu_0$ et tout point $(s,x)\in\Omega\times V$:*

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}_x^\mu\mathcal{O}^q_{U,x}\cap\operatorname{Ker}v_x(s))=\mathfrak{M}_x^{\mu+1}\mathcal{O}^q_{U,x}\cap\operatorname{Ker}v_x(s).$$

Démonstration. a) Il suffit de la faire dans le cas où S est réduit.

b) Prouvons d'abord qu'il existe un voisinage Ω de s_0 dans S et un entier $\mu_0\geqq 0$ tels que l'égalité de la proposition soit vraie pour tout $\mu\geqq\mu_0$ et tout point $(s,x_0)\in\Omega\times\{x_0\}$. Soient Ω et $(f^i)_{i\in I}$ comme dans le lemme (III, 4). Pour toute partie σ de I, notons $\mathscr{F}_\sigma$ le faisceau sur $\Omega\times\{x_0\}$ engendré par les f^i, $i\in\sigma$. Pour tout $s\in\Omega$, il existe, d'après le lemme (III, 4) une partie σ de I telle que Ker $v_{x_0}(s)=\tilde{\mathscr{F}}_{\sigma,x_0}(s)$. L'ensemble I étant fini, l'assertion résulte de la proposition (III, 1).

c) Démontrons maintenant la proposition. Soient $U'\times W$ un voisinage ouvert de $(x_0,0)$ dans $U\times\mathbf{C}^n$ tel que $U'+W\subset U$, et φ l'application de $S\times U'\times W$ dans $S\times W$ définie par $\varphi(s,x,y)=(s,x+y)$.

Soit $v'=\varphi^*v:\mathcal{O}^q_{S\times U'\times W}\to\mathcal{O}^r_{S\times U'\times W}$.

On a pour tout $(s,x)\in S\times U'$: $v'_0(s,x)=v_x(s)$. La proposition résulte donc de b), où l'on remplace S par $S\times U'$, U par W, s_0 par (s_0,x_0), x_0 par 0 et v par v'.

Encore quelques notations. Soit x un point d'une partie ouverte U de $\mathbf{C}^n$. Pour tout entier $\alpha\geqq 0$, notons π_x la projection canonique $\mathcal{O}_{U,x}\to\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}_x^{\alpha+1}$; si φ est un homomorphisme $\mathcal{O}^i_{U,x}\to\mathcal{O}^j_{U,x}$, soit $[\varphi]_\alpha$ l'homomorphisme $(\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}_x^{\alpha+1})^i\to(\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}_x^{\alpha+1})^j$ qui s'en déduit. Enfin, si β est un entier $\geqq\alpha$, designons par π_x^β la projection canonique $\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}_x^{\beta+1}\to\mathcal{O}_{U,x}/\mathfrak{M}_x^{\alpha+1}$.

Proposition (III, 6). *Soient S un espace analytique complexe, U une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, (s_0, x_0) un point de $S \times U$, $\mathcal{C}$ un complexe*

$$\mathcal{C}^p_{S\times U} \xrightarrow{u} \mathcal{C}^q_{S\times U} \xrightarrow{v} \mathcal{C}^r_{S\times U}.$$

Il existe un voisinage $\Omega \times V$ de (s_0, x_0) dans $S \times U$ et deux entiers positifs α et β tels que pour tout $(s, x) \in \Omega \times V$, les deux conditions suivantes soient équivalentes:

(i) *le complexe*

$$\mathcal{C}_x(s):\ \mathcal{C}^p_{U,x} \xrightarrow{u_x(s)} \mathcal{C}^q_{U,x} \xrightarrow{v_x(s)} \mathcal{C}^r_{U,x}$$

est acyclique;

(ii) $\operatorname{Im}[u_x(s)]_\alpha = \pi_\alpha^{\alpha+\beta}(\operatorname{Ker}[v_x(s)]_{\alpha+\beta})$.

Démonstration. Soit $\Omega \times V$ un voisinage de (s_0, x_0) dans $S \times U$ satisfaisant aux conditions du corollaire (III, 3) et de la proposition (III, 5).

Prenons pour α l'entier μ_0 de la proposition (III, 5). On a pour tout entier $\mu \geqq \alpha$ et tout $(s, x) \in \Omega \times V$:

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}_x^\mu \mathcal{C}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s)) = \mathfrak{M}_x^{\mu+1} \mathcal{C}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s),$$

d'où:

$$\mathfrak{M}_x^{\alpha+1} \mathcal{C}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s) \subset \mathfrak{M}_x \operatorname{Ker} v_x(s).$$

Cela implique que tout sous $\mathcal{C}_{U,x}$-module M de $\operatorname{Ker} v_x(s)$ tel que $\operatorname{Ker} v_x(s) \subset M + \mathfrak{M}_x^{\alpha+1} \mathcal{C}^q_{U,x}$ est égal à $\operatorname{Ker} v_x(s)$, car pour un tel M:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} v_x(s) &\subset (M + \mathfrak{M}_x^{\alpha+1} \mathcal{C}^q_{U,x}) \cap \operatorname{Ker} v_x(s)\\ &= M + (\mathfrak{M}_x^{\alpha+1} \mathcal{C}^q_{U,x} \cap \operatorname{Ker} v_x(s)) \subset M + \mathfrak{M}_x \operatorname{Ker} v_x(s),\end{aligned}$$

ce qui entraîne $M = \operatorname{Ker} v_x(s)$ en vertu du lemme de NAKAYAMA. Appliquant cela à $M = \operatorname{Im} u_x(s)$, on trouve déjà que (i) équivaut à la condition (iii) que voici:

(iii) $$\operatorname{Im}[u_x(s)]_\alpha = \pi_\alpha(\operatorname{Ker} v_x(s)).$$

Pour établir l'équivalence de (ii) et (iii), il suffit d'établir l'existence d'un entier $\beta \geqq 0$ tel que pour tout $(s, x) \in \Omega \times V$, on ait:

$$\pi_\alpha^{\alpha+\beta}(\operatorname{Ker}[v_x(s)]_{\alpha+\beta}) = \pi_\alpha(\operatorname{Ker} v_x(s)),$$

i.e.

$$\mathfrak{M}_x^{\alpha+\beta+1} \mathcal{C}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s) \subset \mathfrak{M}_x^{\alpha+1} \operatorname{Im} v_x(s)$$

(l'inclusion opposée étant toujours vraie). Prenons pour β l'entier λ_0 du corollaire (III, 3).

D'après ce corollaire, on a pour tout $(s, x) \in S \times U$ et tout $\lambda \geqq \beta$:

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}^\lambda \mathcal{C}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s)) = \mathfrak{M}_x^{\lambda+1} \mathcal{C}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s),$$

d'où (par récurrence) pour tout entier $\nu \geqq 0$:

$$\mathfrak{M}_x^{\nu+\beta}\mathcal{C}^r_{U,x} \cap \operatorname{Im} v_x(s) \subset \mathfrak{M}_x^{\nu} \operatorname{Im} v_x(s).$$

On a donc l'inclusion voulue pour $\nu = \alpha + 1$, et la proposition est démontrée.

IV. Points de non-platitude d'un morphisme d'espaces analytiques

Définition (IV, 1). *Soit X un espace analytique complexe. Une partie E de X est dite constructible si c'est un élément de la plus petite famille de parties de X stable par réunion finie, intersection finie et passage au complémentaire, et contenant les sous-ensembles analytiques de X.*

Remarque (IV, 2). On voit sans peine qu'une partie constructible E de X peut toujours se mettre sous la forme:

$$E = \bigcup_{i \in I} (A_i - B_i),$$

où $(A_i, B_i)_{i \in I}$ est une famille finie de couples de sous-ensembles analytiques de X.

Remarque (IV, 3). Contrairement à ce qui se passe en géométrie algébrique, si Y est un sous-ensemble analytique de X, et si E est une partie constructible de $X - Y$, E *n'est pas* en général constructible dans X.

Lemme (IV, 4). *Soient X un espace analytique complexe, E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{C}$, v une application analytique de X dans $\mathbf{L}(E, F)$, δ un entier $\geqq 0$. Les ensembles $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Im} v(x) = \delta\}$ et $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Ker} v(x) = \delta\}$ sont constructibles.*

Démonstration. Évident.

Lemme (IV, 5). *Soient X un espace analytique complexe, E, F, G, H quatre espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{C}$, u et v deux applications analytiques de X dans $\mathbf{L}(E, F)$ et $\mathbf{L}(G, H)$ respectivement, π une application linéaire de G sur F. L'ensemble $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Im} u(x) = \dim \pi(\operatorname{Ker} v(x))\}$ est constructible.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que, δ étant entier $\geqq 0$, les ensembles $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Im} u(x) = \delta\}$ et $\{x \in X;\ \dim \pi \operatorname{Ker} v(x)) = \delta\}$ sont constructibles. Pour le premier, cela résulte de (IV, 4); quant au second, il s'écrit:

$$\bigcup_{d \geqq \delta} \left(\{x \in X;\ \dim \operatorname{Ker} v(x) = d\} \cap \{x \in X;\ \dim (\operatorname{Ker} v(x) \cap N) = d - \delta\}\right),$$

où N désigne le noyau de π. Mais $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Ker} v(x) = d\}$ est constructible d'après (IV, 4) et $\{x \in X;\ \dim \operatorname{Ker} v(x) \cap N = d - \delta\}$ l'est pour la même raison, car $\operatorname{Ker} v(x) \cap N$ est le noyau de l'application $(v(x), \pi)$: $G \to H \times F$.

Définition (IV, 6). *On dira qu'une partie E d'un espace analytique X est localement constructible si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert Ω tel que $\Omega \cap E$ soit une partie constructible de Ω.*

Lemme (IV, 7). *Une partie E d'un espace analytique complexe X localement constructible et fermée est analytique.*

Démonstration. La question étant locale, on peut supposer E constructible dans X, i.e. de la forme

$$\bigcup_{i \in I} (A_i - B_i),$$

où $(A_i, B_i)_{i \in I}$ est une famille finie de couples de sous-ensembles analytiques de X. L'hypothèse entraîne que

$$E = \bigcup_{i \in I} \overline{(A_i - B_i)}.$$

Or, si A et B sont deux sous-ensembles analytiques de X, l'adhérence $\overline{A - B}$ de $A - B$ dans X en est un sous-ensemble analytique, d'où le lemme.

Soit $\varphi\colon Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, $\mathscr{E}$ un faisceau analytique cohérent sur Y. Pour étudier localement (sur Y) cette situation, on peut toujours supposer que Y est un sous-espace de $S \times U$ où U est un sous-espace ouvert de $\mathbf{C}^n$, que φ est la composée de l'injection $i\colon Y \to S \times U$ et de la projection $\pi\colon S \times U \to S$, et que $\mathscr{E}$ est l'image réciproque par i d'un faisceau analytique sur $S \times U$, nul en dehors de Y, et noté encore $\mathscr{E}$.

Définition (IV, 8). *On dit que $\mathscr{E}$ est φ-plat en un point $y \in Y$ si $\mathscr{E}_y$ est un $\mathscr{O}_{S, \varphi(y)}$-module plat. En particulier, on dit que φ est plat en y si $\mathscr{O}_Y$ est φ-plat en y. (On dit aussi S-plat au lieu de φ-plat lorsque cela n'entraîne pas de confusion.)*

Théorème (IV, 9). *Soient $\varphi\colon Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, $\mathscr{E}$ un faisceau analytique cohérent sur Y. L'ensemble des points $y \in Y$ en lesquels $\mathscr{E}$ n'est pas φ-plat est analytique.*

Démonstration. La question étant locale, on peut supposer que $Y = S \times U$, que $\varphi = \pi$ et que $\mathscr{E}$ admet un début de résolution:

$$\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow 0$$

$$\mathscr{C} = \mathscr{O}^p_{S \times U} \xrightarrow{u} \mathscr{O}^q_{S \times U} \xrightarrow{v} \mathscr{O}^r_{S \times U}.$$

Soit (s, x) un point de $S \times U$. En vertu du critère de platitude de [1], chap. III, § 5, th. 1 (l'hypothèse «idéalement séparé» étant satisfaite en vertu de loc. cit. prop. 2), pour que le $\mathscr{O}_{S, s}$-modlule $\mathscr{E}_{(s, x)}$ soit plat, il faut et il suffit que $\operatorname{Tor}_1^{\mathscr{O}_{S, s}}(\mathscr{E}_{(s, x)}, \mathbf{C})$ soit nul, i.e. que le complexe

$$\mathscr{C}_x(s)\colon \mathscr{O}^p_{U, x} \xrightarrow{u_x(s)} \mathscr{O}^q_{U, x} \xrightarrow{v_x(s)} \mathscr{O}^r_{U, x}$$

soit acyclique. Or, il résulte de la proposition (III, 6) et du lemme (IV, 5) que l'ensemble des points $(s, x) \in S \times U$ où cela n'est pas vrai est localement constructible. D'après le lemme (IV, 7), l'assertion résulte donc du lemme suivant, dû à DOUADY:

Lemme (IV, 10). *L'ensemble des points $(s, x) \in S \times U$ en lesquels le* complexe $\mathscr{C}_x(s)$ *est acyclique est ouvert dans $S \times U$.*

Démonstration. Les notations sont celles de [3]. Soient (s_0, x_0) un point de $S \times U$, $K \subset U$ un polycylindre $\mathscr{E}(s_0)$-privilégié[4] contenant x_0 à son intérieur. $\mathscr{C}$ définit un complexe de fibrés vectoriels de base S

$$B(K, \mathscr{C}):\ B(K, \mathscr{O}^p_{S\times U}) \to B(K, \mathscr{O}^q_{S\times U}) \to B(K, \mathscr{O}^r_{S\times U}).$$

Si le complexe $\mathscr{C}_{x_0}(s_0)$ est acyclique et si K est assez petit, $B(K, \mathscr{C})$ est exact direct au point s_0, donc aussi au voisinage de s_0.

Mais (loc. cit. 8, lemme 1) si $B(K, \mathscr{C})$ est exact en $s \in S$, le complexe de faisceaux $\mathscr{C}(s)$ est une suite exacte au-dessus de l'intérieur de K, d'où le lemme et le théorème.

Soient S un espace analytique complexe, S' l'ensemble des points lisses de S_{red}; on sait que S' est ouvert et partout dense dans S, et que son complémentaire est analytique.

Définition (IV, 11). *On dira qu'une partie A de S est négligeable si $A \cap S'$ est une réunion dénombrable de sous-variétés analytiques de S', localement fermées et d'intérieur vide.*

Remarque (IV, 12). (i) Toute réunion dénombrable de parties négligeables de S est négligeable.

(ii) Toute partie négligeable de S est maigre (car l'adhérence d'une partie localement fermée et d'intérieur vide de S est d'intérieur vide). Comme S est un espace de BAIRE, une partie négligeable est d'intérieur vide et son complémentaire est partout dense.

Lemme (IV, 13). *Soit $\varphi: X \to S$ un morphisme d'espaces analytiques. On suppose la topologie de X à base dénombrable, et S réduit. Pour que $\varphi(X)$ soit négligeable dans S, il faut et il suffit que φ n'admette de section $\sigma: \Omega \to X$ sur aucun ouvert non vide Ω de S.*

Démonstration. On peut évidemment supposer S lisse et X réduit. X est alors réunion localement finie, donc dénombrable, de sous-variétés analytiques localement fermées X_i, telles que le rang de $\varphi|_{X_i}$ soit constant. On peut donc, (IV, 12), se ramener au cas où X est lisse, et φ de rang constant. Localement, φ est alors la composée d'une submersion et d'une immersion. De nouveau d'après (IV, 12), on peut supposer que $\varphi(X)$ est une sous-variété de S, et φ une submersion de X sur $\varphi(X)$. Dire que

[4] Au sens de loc. cit. 7, définition 1.

$\varphi(X)$ n'est pas négligeable équivaut alors à dire que l'intérieur de $\varphi(X)$ n'est pas vide, i.e. qu'il existe un point $x \in X$ où $\varphi: X \to S$ est une submersion, ce qui signifie que φ admet une section σ au voisinage de $\varphi(x)$.

Proposition (IV, 14). *Soit $\varphi: Y \to S$ un morphisme d'espace analytiques complexes, $\mathscr{E}$ un faisceau analytique cohérent sur Y, Z l'ensemble des points de Y où $\mathscr{E}$ n'est pas φ-plat. On suppose S réduit, et les topologies de S et de Y à base dénombrable. Alors l'image de Z dans S est négligeable.*

Démonstration. La question étant locale, on peut supposer que $Y = S \times U$, U ouvert dans $\boldsymbol{C}^n$, et que φ est la projection $S \times U \to S$. On peut d'autre part supposer S lisse. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que si Ω est un ouvert de S, et f un morphisme $\Omega \to U$, le graphe F de f ne peut être contenu dans Z. Comme F est une variété, on peut trouver un Ω-isomorphisme $\alpha: \Omega \times U \to \Omega \times V$, ($V$ ouvert dans $\boldsymbol{C}^n$), transformant $F \cap (\Omega \times U)$ en $\Omega \times \{x\}$, $x \in V$. D'après le théorème (II, 1), l'ensemble des points $s \in \Omega$ où $\alpha_*(\mathscr{E}|_{\Omega \times V})$ est Ω-plat et dense dans $\Omega \times \{x\}$. Ainsi F n'est pas contenu dans Z, et la proposition est démontrée.

Soient $\varphi: Y \to S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur Y, y un point de Y, s son image par φ; φ définit un morphisme de schemas $\tilde{\varphi}: \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s})$, et $\mathscr{F}_y$ définit un faisceau cohérent $\tilde{\mathscr{F}}_y$ sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$. Cherchons les points de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$ où $\tilde{\mathscr{F}}_y$ est $\tilde{\varphi}$-plat.

La question étant locale, on peut supposer $Y = S \times U$, (U ouvert dans $\boldsymbol{C}^n$), $\varphi = \pi: S \times U \to S$, $y = (s, x) \in S \times U$. Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$; $\mathfrak{p}$ définit au voisinage de (s, x) un sous-ensemble analytique $Z \subset S \times U$ dont le germe $Z_{(s,x)}$ en (s, x) est irréductible. Soit $\mathfrak{q} = \tilde{\pi}(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s})$; $\mathfrak{q}$ définit au voisinage de s un sous-ensemble analytique $T \subset S$, dont le germe T_s en s est irréductible; T_s est le plus petit germe en s de sous-ensemble analytique de S contenant $\pi(Z_{(s,x)})$, (qui en général *n'est pas* analytique). Il s'agit de savoir à quelle condition sur $\mathfrak{p}$ le $(\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$-module $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ est plat. Notons $\kappa(\mathfrak{q})$ le corps résiduel de l'anneau local $(\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$, et $\mathfrak{p}'$ l'image canonique de l'idéal $\mathfrak{p}$ dans $\mathscr{O}_{T \times U,(s,x)}$ ($\mathfrak{p}'$ est l'idéal de $Z_{(s,x)}$ considéré comme germe de sous-ensemble analytique de $T \times U$). On a:

$$\begin{aligned}(\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}} \otimes_{(\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}} \kappa(\mathfrak{q}) &= (\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathscr{O}_{S,s}} (\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}} \\ &= (\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)}} \mathscr{O}_{T\times U,(s,x)} \\ &= (\mathscr{O}_{T\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}'}.\end{aligned}$$

Lemme (IV, 15). *Pour que le $(\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$-module $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ soit plat, il faut et il suffit que* $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)}}((\mathscr{F}_{(s,x)}, (\mathscr{O}_{T\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}'}) = 0$.

Démonstration. Soit $\mathscr{C}: \mathscr{O}_{S\times U}^{\alpha} \to \mathscr{O}_{S\times U}^{\beta} \to \mathscr{O}_{S\times U}^{\gamma}$ un début de résolution de $\mathscr{F}$ au voisinage de (s, x). Comme le $\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)}$-module $(\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}}$

est plat, $(\mathscr{C}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ est un début de résolution libre du $(\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}}$-module $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$. D'après un critère ([1], ch. III, §5, th. 1) déjà utilisé, $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ est $(\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$-plat si et seulement si $\mathrm{Tor}_1^{(\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}}((\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}, \kappa(\mathfrak{q}))=0$. Ce Tor s'identifie à l'homologie du complexe $(\mathscr{C}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}\otimes_{(\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}}\kappa(\mathfrak{q})$, lequel, en posant $\mathscr{C}_T=\mathscr{C}\otimes_{\mathscr{O}_{S\times U}}\mathscr{O}_{T\times U}$, n'est autre que $(\mathscr{C}_{T,(s,x)})_{\mathfrak{p}'}$. L'homologie de ce complexe étant $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_{S\times U,(s,x)}}(\mathscr{F}_{(s,x)}, (\mathscr{O}_{T\times U,(s,x)})_{\mathfrak{p}'})$, le lemme est établi.

Lemme (IV, 16). *Soient X un espace analytique réduit, $\mathscr{Q}: \mathscr{O}_X^{\alpha}\xrightarrow{u}\mathscr{O}_X^{\beta}\xrightarrow{v}\mathscr{O}_X^{\gamma}$ un complexe sur X, x un point de X, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathscr{O}_{X,x}$, définissant au voisinage de x un sous-ensemble analytique Z, X' l'ensemble (analytique) des points de X où $\mathscr{Q}$ n'est pas acyclique. On suppose X irréductible en x. Pour que $(\mathscr{Q}_x)_{\mathfrak{a}}=\mathscr{Q}_x\otimes_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{O}_{X,x})_{\mathfrak{a}}$ soit acyclique, il faut et il suffit que Z_x ne soit pas contenu dans X'_x.*

Démonstration. Soient f^i, $i=1,\ldots,m$, des sections de $\mathscr{O}_X^{\beta}$ au voisinage de x, dont les germes f_x^i en x engendrent $\mathrm{Ker}\,v_x$. Pour que $(\mathscr{Q}_x)_{\mathfrak{a}}$ soit acyclique, il faut et il suffit que les f_x^i soient dans $\mathrm{Im}(u_x)_{\mathfrak{a}}$, i.e. qu'il existe au voisinage de x une section g de $\mathscr{O}_X$ telle que $g_x\notin\mathfrak{a}$ et que $f_x^i\,g_x\in\mathrm{Im}\,u_x$, $i=1,\ldots,m$, ce qui signifie qu'au voisinage de x, on a l'inclusion de faisceaux $g.\,\mathrm{Ker}\,v\subset\mathrm{Im}\,u$. Or, si une telle section g existe, $g_x\notin\mathfrak{a}$ entraîne $\{g=0\}_x\not\supset Z_x$, et par suite x est adhérent à $Z-\{g=0\}$; mais en un point x' où g ne s'annule pas, $g_{x'}$ est inversible, et l'on a: $(\mathrm{Ker}\,v)_{x'}=(g\,.\,\mathrm{Ker}\,v)_{x'}\subset(\mathrm{Im}\,u)_{x'}$, donc $x'\in X-X'$: la condition est nécessaire.

Réciproquement, cette condition implique que X'_x et $(Z\cap X')_x$ sont des sous-germes stricts de X_x et Z_x respectivement. On peut alors trouver au voisinage de x une section de $\mathscr{O}_Z$ nulle sur $Z\cap X'$, mais non identiquement nulle sur Z; d'où une section g de $\mathscr{O}_X$ nulle sur X', et telle que $g_x\notin\mathfrak{a}$. Comme $\mathrm{Ker}\,v/\mathrm{Im}\,u$ est porté par X', il existe k tel que $g^k(\mathrm{Ker}\,v/\mathrm{Im}\,u)=0$ au voisinage de x, i.e. $g^k\,\mathrm{Ker}\,v\subset\mathrm{Im}\,u$: la condition est suffisante.

Appliquons ce lemme à la situation précédente, en prenant $X=T\times U$, $\mathscr{Q}=\mathscr{C}_T$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}'$. Compte tenu de (IV, 15), il vient:

Proposition (IV, 17). *Pour que $(\mathscr{F}_{(s,x)})_{\mathfrak{p}}$ soit un $(\mathscr{O}_{S,s})_{\mathfrak{q}}$-module plat, il faut et il suffit que (s,x) soit adhérent à l'ensemble des points (s',x') de Z en lesquels $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_{S\times U,(s',x')}}(\mathscr{F}_{(s',x')}, \mathscr{O}_{T\times U,(s',x')})=0$.*

Soit R le sous-ensemble analytique de $S\times U$ où $\mathscr{F}$ n'est pas S-plat. Si $Z_{(s,x)}$ n'est par contenu dans $R_{(s,x)}$, (s,x) est adhérent à l'ensemble des points (s',x') de Z où la condition de la proposition est satisfaite. Ainsi, en reprenant les notations du début de ce paragraphe:

Corollaire (IV, 18). *Soit $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{Y,y})$, et soit Z le sous-ensemble analytique de Y défini par $\mathfrak{p}$ au voisinage de y. Si Z contient des points où $\mathscr{F}$ est S-plat, alors $\mathscr{F}_y$ est $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,\varphi(y)})$-plat en $\mathfrak{p}$.*

Hélas, *la réciproque est fausse*, voici un contre-exemple. Prenons $S=\boldsymbol{C}^3$ (variables x, y, z), $U=\boldsymbol{C}^2$ (variables u, v). Soit R le sous-espace de $\boldsymbol{C}^5$ défini par l'idéal:

$$(x-z\,u, y-z\,v, u-\sin v).$$

Prenons $\mathscr{F}=\mathscr{O}_R$: l'ensemble de non-$S$-platitude de $\mathscr{F}$ est exactement R. En effet, il est évidemment contenu dans R; d'autre part ,en un point a de R ne se projetant pas à l'origine, $\pi(R)$ est défini par l'équation:

$$(*) \qquad \frac{x}{z}-\sin\frac{y}{z}=0,$$

donc est de codimension 1, et par suite $\mathscr{F}$ n'est pas S-plat en a[5]; ainsi, l'ensemble de non-S-platitude de $\mathscr{F}$ est dense dans R, donc égal à R, car fermé.

Prenons pour $\mathfrak{p}$ l'idéal de R à l'origine: $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathscr{O}_{S\times U,\,(0,\,0)}$; la projection de R, définie par l'équation (*), n'est pas analytique à l'origine, et n'est contenue dans aucun sous-germe analytique strict de S à l'origine. Par suite $\mathfrak{q}=0$ et $T=S$. La condition du critère (IV, 16) est donc satisfaite. $(\mathscr{F}_{(0,\,0)})_{\mathfrak{p}}$ est $(\mathscr{O}_{S,\,0})_{\mathfrak{q}}$-plat, bien que $\mathscr{F}$ ne soit S-plat en aucun point de $Z=R$.

Remarquons que, dans cet exemple, l'ensemble E des points de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S\times U,\,(0,\,0)})$ *où* $\tilde{\mathscr{F}}_{(0,\,0)}$ *n'est pas* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,\,0})$*-plat n'est pas fermé dans* $\mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{S\times U,\,(0,\,0)})$. En effet, pour tout nombre réel α, soit $\mathfrak{p}_\alpha$ l'idéal

$$(x-z\,u, y-z\,v, u-\sin v, y-\alpha\,z).$$

Le sous-ensemble Z_α défini par $\mathfrak{p}_\alpha$ se projette suivant la droite T_α définie par l'idéal

$$\mathfrak{q}_\alpha=(y-\alpha\,z, x-(\sin\alpha)\,z).$$

Cela dit, voici un début de résolution $\mathscr{C}$ de $\mathscr{F}$ au voisinage de l'origine:

$$\mathscr{O}_{S\times U}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -(u-\sin v) & (y-z\,v) \\ -(u-\sin v) & 0 & -(x-z\,u) \\ (y-z\,v) & (x-z\,u) & 0 \end{pmatrix}} \mathscr{O}_{S\times U}^3 \xrightarrow{(x-z\,u,\, y-z\,v,\, u-\sin v)} \mathscr{O}_{S\times U}.$$

On en déduit $\mathscr{C}_{T_\alpha}$:

$$\mathscr{O}_{T_\alpha\times U}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -(u-\sin v) & (\alpha-v)\,z \\ -(u-\sin v) & 0 & -(\sin\alpha-u)\,z \\ (\alpha-v)\,z & (\sin\alpha-u)\,z & 0 \end{pmatrix}} \mathscr{O}_{T_\alpha\times U}^3 \xrightarrow{((\sin\alpha-u)\,z,\,(\alpha-v)\,z,\,u-\sin v)} \mathscr{O}_{T_\alpha\times U}.$$

[5] Cela résulte, par exemple, de [3], page 68, note 13.

$\mathscr{C}_{T_\alpha}$ n'est acyclique en aucun point de Z_α: la section

$$\left(1, \frac{\sin\alpha - \sin v}{v-\alpha}, z\right)$$

de $\mathscr{O}^3_{T_\alpha \times U}$ est un cycle sans être un bord. D'après (IV, 16), $(\mathscr{F}_{(0,0)})_{\mathfrak{p}_\alpha}$ n'est donc pas $(\mathscr{O}_{S,0})_{\mathfrak{p}_\alpha}$-plat; ainsi $\mathfrak{p}_\alpha \in E$ pour tout α réel. Or

$$\mathfrak{p} = \bigcap_\alpha \mathfrak{p}_\alpha$$

est adhérent à l'ensemble des $\mathfrak{p}_\alpha$, sans être dans E: E n'est donc pas fermé dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S\times U,(0,0)})$.

On notera que le théorème 11.1.1 de [4][6], suppose le morphisme localement de type fini, hypothèse qui n'est bien sûr pas satisfaite ici. On voit qu'en ce qui concerne la platitude, le point de vue des schémas locaux définis par les espaces analytiques ne coïncide pas avec celui de la géométrie analytique. Néanmoins, on trouvera dans l'article de KIEHL qui suit, une démonstration très rapide et très élégante du théorèm IV, 9 a partir du théorème 11.1.1 de [4].

Bibliographie

[1] BOURBAKI, N.: Eléments de mathématique, Algèbre commutative. Paris: Hermann 1961.

[2] Séminaire H. CARTAN 1960—61: Familles d'espaces complexes ... (Secrétariat mathématique de l'E.N.S. 11 rue Pierre Curie, Paris 5ème).

[3] DOUADY, A.: Le Problème des modules pour les sous-esapces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **16**, 1 (1966).

[4] GROTHENDIECK, A.: Eléments de géométrie algébrique, chapitre IV, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n° 28. Essonne, France: Bures-sur-Yvette 1966.

[5] HERVÉ, M.: Several complex variables, Tata Institute, Bombay. Oxford University Press 1963.

[6] ŁOJASIEWICZ, S.: Triangulation of semi-analytic sets, Ann. Sc. Norm. Pisa, série III, **18**, Fasc. IV (1964).

[6] Voici son énoncé: *Soient Y un schéma localement noethérien, $f: X \to Y$ un morphisme localement de type fini, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors l'ensemble des points $x \in X$ où $\mathscr{F}$ est f-plat est ouvert dans X.*

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Applications de la K-théorie

Vu et approuvé :

Paris, le 17 Janvier 1968

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc Zamansky

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean Roche